

Estimador de Estados y Ruido para Sistemas Singulares LPV Politópicos

G.-L. Osorio-Gordillo* C.-M. Astorga-Zaragoza* G.-V. Guerrero-Ramírez*

*Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET

(e-mail: {gloriaosorio, astorga, gerardog}@cenidet.edu.mx)

Resumen—En este artículo se presenta el diseño de un estimador de estados y ruido para un sistema singular lineal de parámetros variables (S-LPV, por las siglas en inglés de *Singular Linear Parameter Variant*) y el ruido a la salida del sistema. El estimador propuesto es una extensión del trabajo desarrollado en el diseño de observadores de estados y ruido para sistemas singulares lineales invariantes en el tiempo (LTI, por las siglas en inglés de *Linear Time Invariant*). Tal extensión es el resultado principal del artículo, el cual da las condiciones necesarias de estabilidad del error de estimación a través de un análisis por Lyapunov. El estimador de estados y ruido propuesto para sistemas S-LPV es probado mediante simulación considerando un ejemplo numérico.

Palabras clave: Sistema singular, estimador de estados y ruido, Lyapunov.

I. INTRODUCCIÓN

Usualmente gran número de procesos físicos son descritos por modelos no lineales. Dado que no existe una metodología precisa para el diseño de observadores no lineales, varios autores prefieren representar estos sistemas utilizando el enfoque Lineal de Parámetros Variables (LPV, por las siglas en inglés de *Linear Parameter Variant*). La idea de este enfoque es representar el sistema mediante la interpolación de modelos locales lineales. En Reberga y col. (2005) se presentan dos enfoques que pueden ser utilizados para formar modelos locales lineales, a partir de modelos no lineales:

- Linealización utilizando series de Taylor.
- Identificación a través de datos de entrada y salida.

La técnica de interpolación presenta un buen enfoque para sistemas LPV, ya que se obtienen estructuras politópicas; estas estructuras son un conjunto de modelos locales lineales programados por una función convexa.

Varios autores han trabajado con la representación singular LPV, por ejemplo Borges y Peres (2006) presenta un análisis de estabilidad y Chadli y col. (2008) presentan un modelo LPV de un sistema mecánico. La representación Takagi-Sugeno ha sido tratada por Ichalal y col. (2009) considerando entradas desconocidas en el sistema y en la salida, usando la estimación de entradas desconocidas para detección de fallas. En Kulcsár y col. (2009) se reconstruye la entrada desconocida.

Una gran cantidad de procesos son usualmente modelados por sistemas de Ecuaciones Diferenciales y Algebraicas (DAE, por las siglas en inglés *Differential and Algebraic Equations*), donde las ecuaciones diferenciales surgen de balances de energía y masa, mientras que las ecuaciones algebraicas son relaciones entre las variables de estado del sistema. Los sistemas singulares se encuentran frecuentemente en campos de ingeniería, específicamente en ingeniería química, mecánica y eléctrica.

Darouach y col. (1996) proponen un observador de orden reducido para sistemas singulares con entradas desconocidas en el sistema y en la salida. En este caso, si la matriz de disturbio es omitida, el observador se vuelve inválido, es decir, entonces el observador no puede ser usado para sistemas singulares con solo ruido en la salida. Liying y Zhaolin (2004) diseñaron un observador para desacoplar la entrada desconocida mediante transformaciones del sistema. Koenig y Mammari (2002) proponen un observador Proporcional-Integral, donde la entrada desconocida se encuentra solo en el sistema, también se considera que la derivada de la entrada desconocida es cero, lo cual indica que el observador funciona solo para pequeñas variaciones. Koenig (2005) considera entradas desconocidas y fallas desconocidas en el sistema y la salida.

Koenig (2005) considera entradas desconocidas y fallas desconocidas de manera simultánea, definiendo que la derivada de la falla no es cero, pero si es acotada. Finalmente Darouach (2009) y Chen y col. (2006) tratan el caso de filtros H_∞ .

La principal contribución de este artículo consiste en sintetizar un estimador de estados y ruido para sistemas singulares LPV. El enfoque propuesto es una extensión de los resultados obtenidos en Gao y Ho (2006) donde se presenta el diseño de un estimador de estados y ruido para sistemas singulares LTI. Se presentan las condiciones de existencia para poder sintetizar el observador con las transformaciones apropiadas. Tales condiciones garantizan la convergencia del observador a través de un análisis de estabilidad por Lyapunov.

II. SISTEMA SINGULAR LPV CON ESTRUCTURA POLITÓPICA

Considere el siguiente sistema singular no lineal de parámetros variables:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), \theta(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + d(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada, $\theta(t) \in \mathbb{R}^k$ es el vector de k parámetros variables, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ es ruido en la salida y $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida. $F(\cdot)$ es una función no lineal. $\text{rank}(E) = r$. La linealización de la función $F(\cdot)$ por series de Taylor alrededor de M puntos de linealización dados por las combinaciones de los límites de variación de los parámetros, generan el siguiente conjunto de modelos singulares lineales locales:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i \\ y(t) &= Cx(t) + d(t) \end{aligned} \quad (2)$$

A_i y B_i son matrices jacobianas del i^{th} modelo. Δx_i es un vector dependiente del i^{th} modelo correspondiente al punto de linealización. Entonces, el sistema no lineal representado por (1) puede ser escrito utilizando la estructura politópica LPV como sigue:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i) \\ y(t) &= Cx(t) + d(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mu_i(\theta(t)) = \mu(\bar{\theta}_i, \underline{\theta}_i, \theta_i(t), t)$ ($\bar{\theta}_i$ y $\underline{\theta}_i$ representan el valor máximo y mínimo de θ_i respectivamente).

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\Delta x_i \in \mathbb{R}^n$ son matrices invariantes en el tiempo definidas por el i^{th} modelo. El modelo singular LPV politópico se encuentra programado por la función $\mu_i(\theta(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ la cual se encuentra en el siguiente conjunto convexo

$$\Omega = \left\{ \mu_i(\theta(t)) = \mu_i(\underline{\theta}, \bar{\theta}, \theta(t)) : \mu_i(\theta(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta(t)) = 1 \right\}$$

Para estimar los estados del sistema (3), asumimos que la terna (E, A_i, C) es impulso observable, demostrando que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_i^T & E^T & C^T \\ E^T & 0 & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E), \quad (4)$$

que la terna (E, A_i, C) es finitamente detectable si

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = \{1, \dots, M\}, \quad (5)$$

y que la dupla (E, A_i) es libre impulso si

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad (6)$$

III. DISEÑO DEL ESTIMADOR DE ESTADOS Y RUIDO PARA SISTEMAS SINGULARES LPV POLITÓPICOS

III-A. Estudio preliminar

En esta sección, consideramos un sistema singular no lineal representado por el siguiente modelo singular LPV politópico:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i) \\ y(t) &= Cx(t) + d(t) \end{aligned} \quad (7)$$

El modelo local se encuentra definido por:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + \Delta x_i \\ y(t) &= Cx(t) + d(t) \end{aligned} \quad (8)$$

A partir de este momento nos enfocaremos en el diseño de un observador local para el modelo descriptor lineal (8). Para simplificar la notación, omitiremos el símbolo (t) en algunos lugares para evitar confusión.

Definiendo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}, & \bar{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, & \bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}, \\ \bar{\Delta}x_i &= \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{B}_i &= \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{m \times p} \end{bmatrix}, & \bar{N} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} C & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

podemos construir el siguiente modelo aumentado:

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}_i \bar{x} + \bar{B}_i u + \bar{N}d + \bar{\Delta}x_i \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned} \quad (10)$$

El modelo descriptor LPV politópico aumentado se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{\bar{x}} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (\bar{A}_i \bar{x} + \bar{B}_i u + \bar{N}d + \bar{\Delta}x_i) \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned} \quad (11)$$

Ahora el vector de estados x y el ruido d conforman el nuevo vector de estados del modelo aumentado.

III-B. Diseño del estimador LPV politópico

En esta sección presentaremos un nuevo diseño de estimadores para sistemas descriptores LPV, utilizando el modelo aumentado (11).

Considere el observador en forma singular como sigue:

$$\bar{E} \hat{\dot{\bar{x}}} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (\bar{A}_i \hat{\bar{x}} + \bar{K}_{pi}(y - \bar{C} \hat{\bar{x}}) + \bar{B}_i u + \bar{N} \hat{d} + \bar{\Delta}x_i) \quad (12)$$

donde $\hat{\bar{x}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ es la estimación del vector \bar{x} , $\hat{d} \in \mathbb{R}^m$ es la estimación del ruido d , y $\bar{K}_{pi} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ es la matriz a ser encontrada.

La matriz del estimador politopico puede ser determinada de manera que permita que el error de estimación converja asintóticamente a cero. Definiendo el error de estimación para el i^{th} modelo, como sigue:

$$\bar{E}\dot{\bar{x}} - \bar{E}\dot{\hat{\bar{x}}} = \bar{A}_i\bar{x} + \bar{B}_i u + \bar{N}d + \bar{\Delta}x_i - \bar{A}_i\hat{\bar{x}} - \bar{K}_{pi}(y - \bar{C}\hat{\bar{x}}) - \bar{B}_i u - \bar{N}\hat{d} - \bar{\Delta}x_i \quad (13)$$

Definiendo $\bar{C}_d = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix}$ y $\bar{e} = \bar{x} - \hat{\bar{x}}$, entonces $d = \bar{C}_d\bar{x}$, $\hat{d} = \bar{C}_d\hat{\bar{x}}$, y $d - \hat{d} = \bar{C}_d\bar{e}$.

$$\begin{aligned} \bar{E}(\dot{\bar{x}} - \dot{\hat{\bar{x}}}) &= \bar{A}_i(\bar{x} - \hat{\bar{x}}) - \bar{K}_{pi}(y - \bar{C}\hat{\bar{x}}) + \bar{N}(d - \hat{d}) \\ \bar{E}\dot{\bar{e}} &= \bar{A}_i\bar{e} - \bar{K}_{pi}\bar{C}(\bar{x} - \hat{\bar{x}}) + \bar{N}\bar{C}_d\bar{e} \\ \bar{E}\dot{\bar{e}} &= \bar{A}_i\bar{e} - \bar{K}_{pi}\bar{C}\bar{e} + \bar{N}\bar{C}_d\bar{e} \\ \bar{E}\dot{\bar{e}} &= (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)\bar{e} \end{aligned} \quad (14)$$

Tomando en cuenta las expresiones (11), (12) y (14), la ecuación dinámica del error se puede expresar como:

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)\bar{e} \quad (15)$$

El error de estimación tiende asintóticamente a cero si $\sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)\bar{e}$ es estable.

IV. CONDICIONES DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Las condiciones para asegurar convergencia y estabilidad de (12) se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 1: El observador politopico (12) es asintóticamente estable si existe una matriz común X tal que

$$(\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)^T X + X^T (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d) < 0, \quad \forall_i \in \{1, \dots, M\} \quad (16)$$

Demostración 1: Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\bar{e}) = \bar{e}^T X^T \bar{E}\bar{e}, \quad X^T \bar{E} = \bar{E}^T X > 0 \quad (17)$$

usando la ecuación (14)

$$\dot{V}(\bar{e}) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) \left\{ \bar{e}^T \left[(\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)^T X + X^T (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d) \right] \bar{e} \right\} \quad (18)$$

para toda θ , $\sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) = 1$ y $\mu_i(\theta(t)) \geq 0$.

siempre y cuando $e \neq 0$, (18) se cumple si

$$(\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d)^T X + X^T (\bar{A}_i - \bar{K}_{pi}\bar{C} + \bar{N}\bar{C}_d) < 0, \quad \forall_i \in \{1, \dots, M\} \quad (19)$$

V. SINTONIZACIÓN DEL ESTIMADOR

La desigualdad (19) se puede mostrar como:

$$(\bar{A}_i X - \bar{C}^T \bar{K}_{pi}^T X + \bar{C}_d^T \bar{N}^T X + X^T \bar{A}_i - X^T \bar{K}_{pi} \bar{C} + X^T \bar{N} \bar{C}_d) < 0, \quad \forall_i \in \{1, \dots, M\} \quad (20)$$

La desigualdad matricial bilineal (BMI, por las siglas en inglés de *Bilinear Matrix Inequality*) de la Ec. (20) puede ser transformada en una desigualdad matricial lineal (LMI, por las siglas en inglés de *Linear Matrix Inequality*) si consideramos que $\bar{Q}_i = \bar{K}_{pi}^T X$. De manera que (20) se puede expresar como:

$$\bar{A}_i X - \bar{C}^T \bar{Q}_i + \bar{C}_d^T \bar{N}^T X + X^T \bar{A}_i \bar{Q}_i \bar{C} + X^T \bar{N} \bar{C}_d < 0 \quad (21)$$

Esta última desigualdad es lineal con respecto a las variables desconocidas X y \bar{Q}_i . Consecuentemente, existen herramientas que pueden ser usadas para la solución de (21).

La matriz de ganancia del estimador puede ser determinada como:

$$\bar{K}_{pi} = X^{-T} \bar{Q}_i^T \quad (22)$$

Donde la matriz de ganancia $\bar{K}_{pi} = \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ con $K_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ siendo no singular.

El estimador (12) puede ser escrito como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{E}\dot{\hat{\bar{x}}} &= [\bar{A}_i + \bar{N}\bar{C}_d - \bar{K}_{pi}\bar{C}] \hat{\bar{x}} + \bar{B}_i u + \bar{K}_{pi} y \\ &= \begin{bmatrix} A_i - K_{1i}C & -K_{1i} \\ -K_{2i}C & K_{2i} \end{bmatrix} \hat{\bar{x}} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{bmatrix} y \end{aligned} \quad (23)$$

VI. TRANSFORMACIÓN DEL ESTIMADOR DE FORMA SINGULAR A UN ESTIMADOR TIPO LUENBERGER

Teorema 2: Si la dupla (E, A_i) es libre impulso y estable, para el sistema (11), existe un observador tipo Luenberger de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_s &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (A_{si} \hat{x}_s + B_{si} u + K_{si} y) \\ \hat{\bar{x}} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) \left(\bar{Q}_{1i} \bar{Q}_{2i} \begin{bmatrix} \hat{x}_s \\ B_{fi} u + K_{fi} y + \Delta_{fi} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Demostración 2: Desde que el $\text{rank}(E) = r$, existen dos matrices ortogonales U y V tal que E tiene la siguiente descomposición

$$E = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} V^T \quad (25)$$

donde $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ con $\sigma_i > 0$, $i = \{1, 2, \dots, r\}$.

Definiendo

$$P_1 = U^{-1} = U^T \\ Q_1 = V^T \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}^{-1} = V \begin{bmatrix} (\Sigma_r)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (26)$$

podemos obtener las siguientes matrices transformadas estrictamente equivalentes:

$$P_1 E Q_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 A_i Q_1 = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde $A_{22i} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ es una matriz no singular desde que la dupla (E, A_i) es libre impulso. Seleccionando

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12i}(A_{22i})^{-1} \\ 0 & -(A_{22i})^{-1} \end{bmatrix}, \quad Q_{2i} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -(A_{22i})^{-1} A_{21i} & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (28)$$

puede continuar realizando las siguientes transformaciones

$$P_{2i} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix} Q_{2i} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix} \\ P_{2i} \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix} Q_{2i} = \begin{bmatrix} A_{11i} - A_{12i}(A_{22i})^{-1} A_{21i} & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A_{si} & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Definiendo

$$\bar{P}_{1i} = \begin{bmatrix} I_n & -K_{1i} K_{2i}^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{1i} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C & K_{2i}^{-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\bar{P}_{2i} = \begin{bmatrix} P_{2i} P_1 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{2i} = \begin{bmatrix} Q_{2i} Q_{1i} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

se puede obtener

$$\bar{P}_{2i} \bar{P}_{1i} \bar{E} \bar{Q}_{1i} \bar{Q}_{2i} \\ = \begin{bmatrix} P_{2i} P_1 E Q_1 Q_{2i} & 0 \\ 0 & 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r+m} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\bar{P}_{2i} \bar{P}_{1i} (\bar{A}_i + \bar{N} \bar{C}_d - \bar{K}_{pi} \bar{C}) \bar{Q}_{1i} \bar{Q}_{2i} \\ = \begin{bmatrix} P_{2i} P_1 A_i Q_1 Q_{2i} & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{si} & 0 \\ 0 & -I_{n+m-r} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\bar{P}_{2i} \bar{P}_{1i} \bar{B}_i \\ = \begin{bmatrix} B_{si} \\ B_{fi} \end{bmatrix}, \quad B_{si} \in \mathbb{R}^{r \times p}, \quad B_{fi} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times p} \quad (33)$$

$$\bar{P}_{2i} \bar{P}_{1i} \bar{K}_{pi} \\ = \begin{bmatrix} K_{si} \\ K_{fi} \end{bmatrix}, \quad K_{si} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad K_{fi} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times m}$$

$$\bar{P}_{2i} \bar{P}_{1i} \bar{\Delta} x_i \\ = \begin{bmatrix} \Delta_{si} \\ \Delta_{fi} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{si} \in \mathbb{R}^r, \quad \Delta_{fi} \in \mathbb{R}^{(n-r)}$$

Usando (31)-(34), y definiendo

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_s \\ \hat{x}_f \end{bmatrix} = (\bar{Q}_{1i} \bar{Q}_{2i})^{-1} \hat{x} \quad (35)$$

podemos realizar una transformación estrictamente equivalente de (23) tal que

$$\dot{\hat{x}}_s = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (A_{si} \hat{x}_s + B_{si} u + K_{si} y + \Delta_{si}) \\ \hat{x}_f = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) (B_{fi} u + K_{fi} y + \Delta_{fi}) \quad (36)$$

Junto con

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\theta) \left(\bar{Q}_{1i} \bar{Q}_{2i} \begin{bmatrix} \hat{x}_s \\ \hat{x}_f \end{bmatrix} \right) \quad (37)$$

(36) forman un estimador tipo Luenberger para el sistema (11).

VII. EJEMPLO NUMÉRICO

Para mostrar la eficiencia del método presentado, se considera un sistema descriptor no lineal de la forma (1) definido por

$$\dot{x}_1(t) = -1,5x_1^2(t) + 0,2x_3(t)x_4(t) + \theta(t) \\ \dot{x}_2(t) = -u_1(t)x_1^2(t) - x_4(t)x_3^2(t) - 0,5x_2(t)\theta(t) \\ 0 = 0,5x_2(t) + 0,2x_4(t) + \theta(t) - x_3(t) \\ 0 = -x_2^2(t) + x_3^2(t) + \theta(t)u_2(t) - x_4(t) \quad (38)$$

$$y(t) = x_1(t) + d(t)$$

El parámetro θ varía de $\theta \in [0,5, 1]$. Si se linealiza considerando $u_1 = 8$, $u_2 = 3$, $\theta = 0,5$ se obtiene:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,9733 & 0 & -0,6581 & -0,2958 \\ -15,8576 & -0,25 & -9,7332 & -2,1871 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,2 \\ 0 & 5,2832 & -2,9578 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,9823 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 1,0002 \\ 1,3226 \\ 0,5 \\ 0,7911 \end{bmatrix}$$

Ahora si consideramos $u_1 = 8$, $u_2 = 3$, $\theta = 1$, obtenemos:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3,8760 & 0 & -0,9620 & -0,3126 \\ -20,6720 & -0,5 & -15,0361 & -2,4430 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,2 \\ 0 & 6,4042 & -3,1260 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,6693 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{bmatrix} 2,0006 \\ 3,2092 \\ 1,0001 \\ 7,8110 \end{bmatrix}$$

con lo que podemos generar el modelo politopico siendo $M = 2$, al ser $k = 1$.

Las funciones de ponderación $\mu_i(\theta)$ son:

$$\mu_1(\theta) = \frac{\theta - \underline{\theta}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}} = \frac{\theta - 0,5}{0,5}$$

$$\mu_2(\theta) = \frac{\bar{\theta} - \theta}{\bar{\theta} - \underline{\theta}} = \frac{1 - \theta}{0,5}$$

Usando la salida y y las entradas $u_{1,2}$, podemos construir el estimador (12) o (23) con

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad \bar{C}_d = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -2,9733 & 0 & -0,6581 & -0,2958 & 0 \\ -15,8576 & -0,25 & -9,7332 & -2,1871 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 5,2832 & -2,9578 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -3,8760 & 0 & -0,9620 & -0,3126 & 0 \\ -20,6720 & -0,5 & -15,0361 & -2,4430 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 6,4042 & -3,1260 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,9823 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,6693 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{p1} = \begin{bmatrix} -1,6414 \\ -7,1882 \\ 0,2526 \\ 1,1772 \\ 0,7426 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{p2} = \begin{bmatrix} -2,3140 \\ -8,9996 \\ 0,2691 \\ 1,7585 \\ 0,9157 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente el observador tipo Luenberger (37) con

$$A_{s1} = \begin{bmatrix} -2,9733 & -1,3507 \\ -15,8576 & -14,9975 \end{bmatrix}$$

$$A_{s2} = \begin{bmatrix} -3,8760 & -1,9853 \\ -20,6720 & -24,2533 \end{bmatrix}$$

$$K_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{s2} = 10^{-15} \times \begin{bmatrix} 0,4441 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,0628 \\ 0 & 0,3142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1231 \\ 0 & 0,6153 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{f1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,7426 \end{bmatrix}, \quad K_{f2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,9157 \end{bmatrix}$$

$$B_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1343 \\ -0,9823 & -1,2986 \end{bmatrix}, \quad B_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,3107 \\ -1,6693 & -3,3536 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9781 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,3903 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1,3467 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0958 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,9788 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1,0921 \end{bmatrix}$$

Considerando las siguientes condiciones iniciales, $x_0 = [0,1 \ 0,4 \ 0,3 \ 0,4]^T$, $d_0 = 0$, $\hat{x}_{s0} = [0,1 \ 0,2]^T$, se obtienen las siguientes figuras.

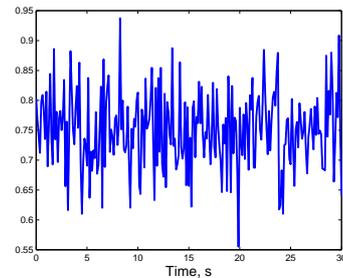


Figura 1. Evolución de parámetro θ

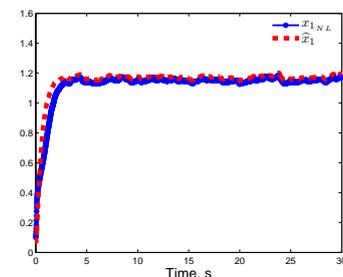


Figura 2. Convergencia de $\hat{x}_1(t)$ al estado real $x_1(t)$

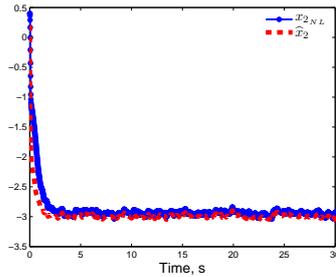


Figura 3. Convergencia de $\hat{x}_2(t)$ al estado real $x_2(t)$

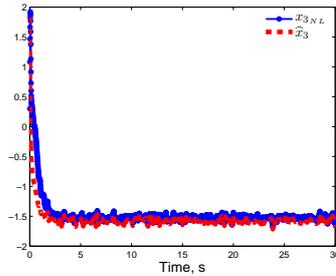


Figura 4. Convergencia de $\hat{x}_3(t)$ al estado real $x_3(t)$

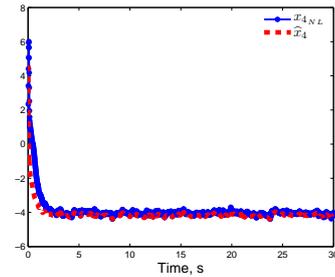


Figura 5. Convergencia de $\hat{x}_4(t)$ al estado real $x_4(t)$

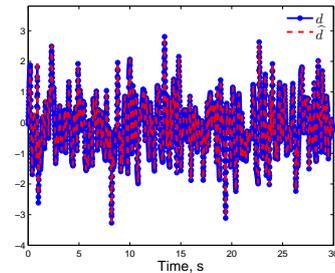


Figura 6. Convergencia de $\hat{d}(t)$ al estado real $d(t)$

VIII. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto un estimador para sistemas singulares LPV politopicos. La síntesis del estimador es una extensión del trabajo presentado en Gao y Ho (2006) para sistemas singulares LTI a sistemas singulares LPV. Se dan las condiciones suficientes para asegurar la existencia y estabilidad del estimador propuesto usando un análisis de Lyapunov basado en la formulación de LMIs. El desempeño del estimador es evaluado mediante una simulación utilizando un ejemplo numérico.

REFERENCIAS

- R. A. Borges y P. L. D. Peres (2006). H_∞ LPV filtering for linear systems with Arbitrarily Time-Parameters in Polytopic Domains. En: *Proceedings of the 45th IEEE conference on Decision & Control*.
- M. Chadli, M. Darouach y J. Daafouz (2008). Static output stabilisation of singular LPV systems: LMI formulation. En: *47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Y. P. Chen, Z. D. Zhou, C. N. Zeng y Q. L. Zhang (2006). H_∞ Filtering for Descriptor systems. *International Journal of Control, Automation and Systems* **4**(6), 697-704.
- M. Darouach (2009). H_∞ Unbiased filtering for linear descriptor systems via LMI. *IEEE Trans. on Automatic Control* **54**, 1966-1972.
- M. Darouach, M. Zasadzinski y M. Hayar (1996). Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control* **41**, 1068-1072.
- Z. Gao y D. W. C. Ho (2006). State/Noise Estimator for Descriptor Systems With Application to Sensor Fault Diagnosis. *IEEE Trans. on Signal Processing* **54**(4), 1316-1326.
- D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot y D. Maquin (2009). Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. *Sciences et Technologies de l'Automatique*.
- D. Koenig (2005). Unknown Input Proportional Multiple-Integral Observer Design for Linear Descriptor Systems: Application to State and Fault Estimation. *IEEE Trans. on Automatic Control* **50**, 212-217.
- D. Koenig y S. Mammar (2002). Design of Proportional-Integral Observer for Unknown Input Descriptor Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **47**, 2057-2062.

- B. Kulcsár, J. Bokor y J. Shinar (2009). Unknown input reconstruction for LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- S. Liying y C. Zhaolin (2004). State and Input estimation for descriptor systems with unknown inputs. En: *Proceeding of the 2004 American Control Conference*.
- L. Reberga, D. Henrion, J. Bernussou y F. Vary (2005). LPV modeling of a turbofan engine. En: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*.